C) On considère : $U_n = \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{p!}{1\times 3\times 5\times \ldots \times (2p+1)}\right)$ où $n \in \mathbb{N}$.

1°/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = 2.\int_0^1 \frac{1-\left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+t^2}$.

2°/a) On pose $V_n = 2I - U_n$. Exprimer V_n à l'aide d'une intégrale.

b) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$: $0 \leq \frac{(1-t^2)^{n+1}}{1+t^2} \leq 1$.

c) Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} V_n$

3°/ Calculer alors : $\lim_{n\to+\infty} U_n$.